Übungen zur Theoretischen Physik Ia: Klassische Mechanik SoSe 25

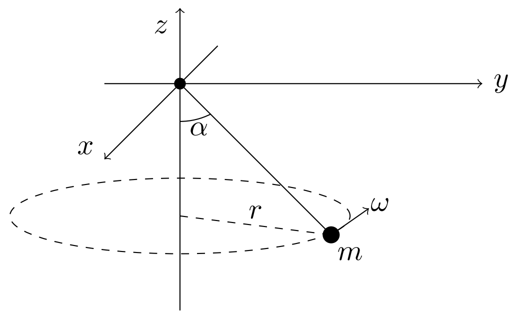
Prof. Dr. V. Braun

Blatt 9 — Ausgabe: 17.06.2025 — Abgabe: 23.06. - 27.06.2025

Aufgabe 30: Perle auf rotierendem Draht in Zylinderkoordinaten

Skript: 3.1 Lagrange Gleichungen 1.Art
Literatur: Nolting, Analytische Mechanik. Kap. 1.2.5 Nicht-holonome Systeme, Kap. 1.2.6 Anwendungen der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

An einer vertikalen Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = konst.$ dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Perle der Masse m gleitet.
Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art für die **Zylinderkoordinaten** (r, φ, z) auf und lösen Sie die Bewegungsgleichun von $z(t)$ für die Anfangsbedingung $z(0) = \dot{z}(0) = 0$. Nutzen Sie die erhaltene Lösung für $z(t)$ um die beiden Lagrange-Multiplikatoren zu bestimmen.



Hinweise:

- Sie benötigen eine Nebenbedingung, welche z und r in Beziehung zueinander setzt. Die Weitere für die Winkelgeschwindigkeit läßt sich trivial integrieren, so das sie diese in der Form $g_2(\varphi) = 0$ angeben können.

- Nachdem Sie die drei Lagrange-Gleichungen (eine für jede Koordinate) aufgestellt haben, setzen Sie die Zwangsbedingungen ein. Zwei der Gleichungen enthalten denselben Lagrange-Multiplikator. Eliminieren Sie diesen aus den Gleichungen und lösen Sie die resultierende Differentialgleichung für $z(t)$. Ein möglicher Ansatz ist

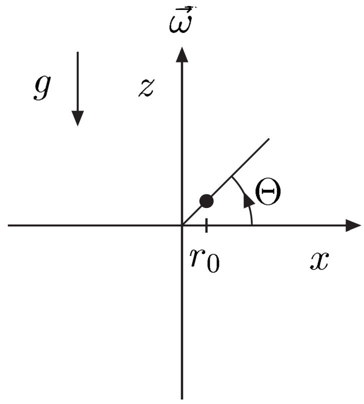
$$z(t) = a_1 e^{\omega t \sin\alpha} + a_2 e^{-\omega t \sin\alpha} + \frac{g}{\omega^2} \cot^2 \alpha$$

  wobei $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$. Hierbei ist der zeitabhängige Teil für die homogene DGL und die Konstante $\frac{g}{\omega^2} \cot^2 \alpha$ die spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

Aufgabe 31: Perle auf Draht: Lagrange I. Art

Skript: 2.9 Rotierendes Bezugssystem
2.6 Lagrange Energie
3.1 Lagrange Gleichungen 1. Art
Literatur: Nolting Band 2 Analytische Mechanik. 1.2.6 Anwendung der Methode der Largrange'schen Multiplikatoren

Betrachten Sie wiederum die Konfiguration in Aufgabe 15. (Siehe Abbildung.)
Stellen Sie dieses Mal die Lagrangegleichungen 1. Art auf, geben Sie die Zwangskräfte an und lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Berechnen Sie die Energie der Perle, indem Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen in die Definition einsetzen und indem Sie die Arbeit, die durch die Rotation des Drahtes geleistet wird, berechnen.



Aufgabe 32: Fouriertransformation

[**Die Fouriertransformation wird am Fr. 20.6 in der Zentralübung eingeführt**

Berechnen Sie die Fourierentwicklung der folgenden häufig vorkommenden periodischen Funktionen $f(t+T) = f(T)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T dt f(t)\cos(n\omega t), \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T dt f(t)\sin(n\omega t), \end{aligned}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ und T die Periode der Funktion $f(t+T) = f(t)$ ist.

a) Dreiecksspannung

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad -\pi \leq t < \pi$$

b) Rechtecksspannung

$$f(t) = \begin{cases} c_1 & \text{für} \quad -\pi < x \leq 0 \\ c_2 & \text{für} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

c) Sägezahnspannung

$$f(t) = \frac{x_0}{\pi} t \quad \text{für} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

d) Periodische quadratische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t(\pi + t) & \text{für} \quad -\pi < x \leq 0 \\ t(\pi - t) & \text{für} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$